

Spectrum dan Spectrum Laplacian pada Graf Mahkota

Khoirul Umam

Matematika, Institut Teknologi dan Bisnis Kalbis
Jalan Pulomas Selatan kav.22, Jakarta Timur 13210

Email: khoirul.umam@kalbis.ac.id

Abstract: Crown Crown (S_n^0) is a graph that has the number of vertices $2n$ and the number of edges are $n(n - 1)$ with $n \geq 3$, $n \in$ integers. Suppose that $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ are eigen values of a matrix and $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ are the multiplicity of each λ , so the spectrum of a graph can be expressed as a matrix $2 \times n$ whose line elements are $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ in the first row, and $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ in the second row. In this paper, we will discuss spectrums from adjacency matrices and laplacian matrix spectrums of S_n^0 .

Keywords: crown graph, eigen value, multiplicity, spectrums

Abstrak: Graf Mahkota atau Crown graph (S_n^0) merupakan graf yang mempunyai jumlah simpulnya $2n$ dan jumlah busurnya $n(n - 1)$ dengan $n \geq 3$, $n \in$ bilangan bulat. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari suatu matriks dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas dari masing-masing λ , maka spectrum suatu graf dapat dinyatakan dengan matriks berordo $2 \times n$ yang elemen barisnya $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama, dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua. Pada penelitian ini akan dibahas spectrum dari matriks adjacency dan spectrum matriks laplacian dari S_n^0 .

Kata kunci: crown graph, graf mahkota, multiplisitas, nilai eigen, spectrums

I. PENDAHULUAN

Graf Mahkota atau sering disebut Crown graph dinotasikan dengan S_n^0 . Graf Mahkota didefinisikan sebagai graf dengan himpunan simpul $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ dan himpunan busur $\{(x_i, y_i) : 0 \leq i, j \leq n - 1, i \neq j\}$ dengan $n \geq 3, n \in$ bilangan bulat. Graf mahkota juga dapat didefinisikan sebagai graf bipartit komplit ($K_{n,n}$) dengan menghilangkan simpul horisontal [1].

Dari definisi tersebut diketahui bahwa jumlah simpul pada S_n^0 adalah $2n$ dan jumlah busurnya adalah $n(n - 1)$ dengan $n \geq 3, n \in$ bilangan bulat. Sehingga dapat diperoleh jumlah simpul S_n^0 untuk $n = 3, 4, 5, 6, \dots, n$ adalah $6, 8, 10, 12, \dots, 2n$ Sedangkan jumlah busurnya adalah $6, 12, 20, 30, \dots, n(n - 1)$ [2]. Beberapa Graf Mahkota dapat dilihat pada Gambar 1.

Terdapat kasus khusus dari S_n^0 , yaitu untuk S_3^0 dengan 6 simpul membentuk sebuah cycle, sedangkan untuk S_4^0 dengan 8 simpul merupakan isomorfis dari graf cube [2].

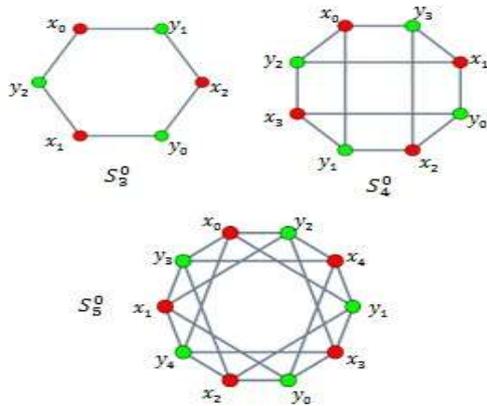
Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen dari suatu matriks dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas dari masing-masing λ , maka spectrum suatu graf G dapat didefinisikan sebagai himpunan nilai-nilai eigen yang dituliskan dengan multiplisitasnya[3]. Spectrum dinyatakan dengan matriks berordo $2 \times n$ yang elemen barisnya $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama, dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua. Jika urutan nilai $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ maka spektrum suatu matriks dapat dituliskan:

$$Spec A(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \dots & m(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

II. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Penelitian ini bertujuan untuk menguraikan bentuk umum spectrum dan spectrum laplacian pada Graf Mahkota (S_n^0).

Makalah dan buku yang berkaitan dengan spectrum dan spectrum laplacian dipelajari, selanjutnya hasil studi literatur tersebut digunakan sebagai landasan teori untuk mendapatkan bukti formal untuk menemukan bentuk umum spectrum dan spectrum laplacian pada Graf Mahkota (S_n^0).



Gambar 1. Graf Mahkota

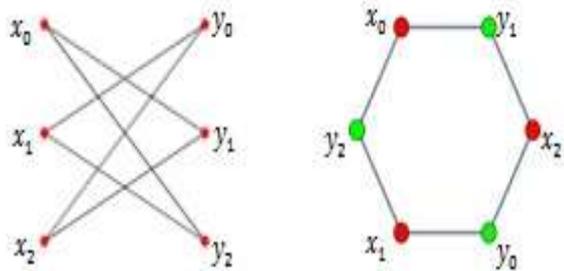
III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan bentuk umum spectrum dan spectrum laplacian pada Graf Mahkota (S_n^0) akan diuraikan dalam bentuk teorema dan disertai buktinya. Namun Sebelumnya akan dilihat pola dari spectrum dan spectrum laplacian pada Graf Mahkota (S_n^0).

A. Menemukan Pola Spectrum dan Spectrum Laplacian Pada Graf Mahkota (S_n^0).

1. Graf Mahkota S_3^0

Graf Mahkota S_3^0 dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf Mahkota S_3^0

Diperoleh matriks ketetanggaan dari S_3^0 :

$$A(S_3^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

persamaan polinomial karakteristik S_3^0 :

$$\phi(S_3^0) = \lambda^6 - 6\lambda^4 + 9\lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$$spec A(S_3^0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh matriks laplacian dari S_3^0 :

$$L(S_3^0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

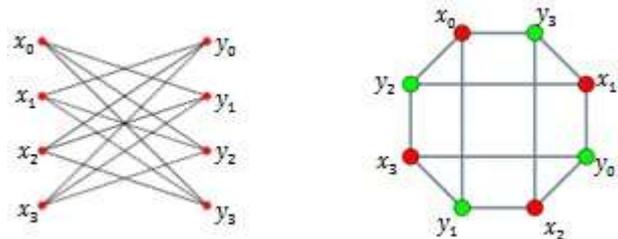
persamaan polinomial karakteristik laplacian S_3^0 :

$$\phi(S_3^0) = \lambda^6 - 12\lambda^5 + 54\lambda^4 - 112\lambda^3 + 105\lambda^2 - 36\lambda = \lambda(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$$

$$spec L(S_3^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Graf Mahkota S_4^0

Graf Mahkota S_4^0 dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf Mahkota S_4^0

Diperoleh matriks ketetanggaan dari S_4^0 :

$$A(S_4^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diperoleh persamaan polinomial karakteristik S_4^0 :

$$\phi(C_4) = \lambda^8 - 12\lambda^6 + 30\lambda^4 - 28\lambda^2 + 9 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^3(\lambda - 1)^3(\lambda - 3)$$

$$\text{spec } A(S_4^0) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh matriks laplacian dari S_4^0 :

$$L(S_4^0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

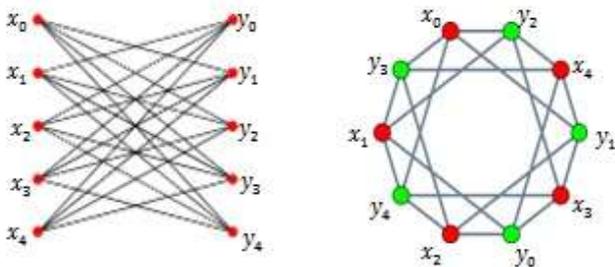
diperoleh persamaan polynomial karakteristik laplacian S_4^0 :

$$\begin{aligned} \phi(S_4^0) &= \lambda^8 - 24\lambda^7 + 240\lambda^6 - 1296\lambda^5 + 4080\lambda^4 \\ &\quad - 7488\lambda^3 + 7424\lambda^2 - 3072\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^3(\lambda - 6) \end{aligned}$$

$$\text{spec } L(S_4^0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Graf Mahkota S_5^0

Graf Mahkota S_5^0 dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4. Graf Mahkota S_5^0

Diperoleh matriks ketetanggaan dari S_5^0 :

$$A(S_5^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diperoleh persamaan polynomial karakteristik S_5^0 :

$$\begin{aligned} \phi(S_5^0) &= \lambda^{10} - 20\lambda^8 + 70\lambda^6 - 100\lambda^4 + 65\lambda^2 - 16 \\ &= \lambda(\lambda + 3)^4(\lambda - 5)^4(\lambda - 8) \end{aligned}$$

$$\text{spec } A(S_5^0) = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Diperoleh matriks laplacian dari S_5^0 :

$$L(S_5^0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

diperoleh persamaan polynomial karakteristik laplacian S_5^0 :

$$\begin{aligned} \phi(S_5^0) &= \lambda^{10} - 40\lambda^9 + 700\lambda^8 - 7040\lambda^7 \\ &\quad + 44870\lambda^6 - 188048\lambda^5 \\ &\quad + 518460\lambda^4 - 907200\lambda^3 \\ &\quad + 914625\lambda^2 - 405000\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 3)^4(\lambda - 5)^4(\lambda - 8) \end{aligned}$$

$$\text{spec } L(S_4^0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan spectrum dan spectrum laplacian dari Graf Mahkota diatas diperoleh Tabel 1 dan Tabel 2. Pada Tabel 1 diperoleh bentuk umum untuk spectrum Graf Mahkota (S_n^0) yaitu

$$\text{Spec } A(S_n^0) = \begin{pmatrix} 1-n & -1 & 1 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sedangkan pada Tabel 2 diperoleh bentuk umum untuk spectrum laplacian dari Graf Mahkota (S_n^0) yaitu

$$\text{Spec } L(S_n^0) = \begin{pmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tabel 1 Spectrum dari Graf Mahkota

Graf Mahkota	Spectrum
S_3^0	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
S_4^0	$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
S_5^0	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
...	...
S_n^0	$\begin{pmatrix} 1-n & -1 & 1 & n \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

Tabel 2 Spectrum laplacian dari Graf Mahkota

Graf Mahkota	Spectrum Laplacian
S_3^0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
S_4^0	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
S_5^0	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
...	...
S_n^0	$\begin{pmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$

B. Teorema dan Bukti Formal dari Spectrum dan Spectrum Laplacian pada Graf Mahkota (S_n^0).

Teorema 1. Misalkan S_n^0 adalah Graf Mahkota, maka spectrum dari S_n^0 adalah

$$Spec A(S_n^0) = \begin{pmatrix} 1-n & -1 & 1 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti Formal

Misalkan $A(S_n^0)$ adalah matriks adjacency dari Graf Mahkota [4], maka

$$A(S_n^0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A(K_n) \\ A(K_n) & 0 \end{pmatrix}$$

$A(S_n^0)$ dapat dipartisi menjadi matriks 0 dan $A(K_n)$, dengan K_n adalah graf reguler. Karena elemen $A(S_n^0)$ disusun oleh $A(K_n)$ maka nilai-nilai eigen $A(S_n^0)$ dapat dibentuk dari $A(K_n)$ [5]. Jones (2013) telah menjelaskan bahwa septrum $A(K_n)$ adalah $Spec A(K_n) = \begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}$. Multiplisitas $A(S_n^0)$ sama dengan dua kali multiplisitas $A(K_n)$, dikarenakan $A(S_n^0)$ disusun dari dua $A(K_n)$ [6].

Misalkan λ adalah nilai-nilai eigen dari $A(K_n)$, λ^* adalah nilai-nilai eigen dari $A(S_n^0)$ dan \mathbf{v}_λ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ , kemudian

misalkan $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ -\mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$. Maka untuk \mathbf{x} diperoleh:

$$A(S_n^0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A(K_n) \\ A(K_n) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ \lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \mathbf{x}$$

$$= \lambda^* \mathbf{x}$$

- Jadi untuk \mathbf{x} diperoleh $\lambda^* = \lambda$, maka
- untuk $\lambda = -1$, $\lambda^* = \lambda = -1$ dengan multiplisitas $n - 1$.
 - untuk $\lambda = n - 1$, $\lambda^* = \lambda = n - 1$ dengan multiplisitas 1.

Kemudian untuk vektor \mathbf{y} , diperoleh

$$A(S_n^0)\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & A(K_n) \\ A(K_n) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ -\mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -\lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -\lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda \mathbf{y}$$

$$= \lambda^* \mathbf{y}$$

- Jadi untuk \mathbf{y} diperoleh $\lambda^* = -\lambda$, maka
- untuk $\lambda = -1$, $\lambda^* = -\lambda = -(-1) = 1$ dengan multiplisitas $n - 1$.
 - untuk $\lambda = n - 1$, $\lambda^* = -\lambda = -(n - 1) = 1 - n$ dengan multiplisitas 1.

terbukti bahwa

$$Spec A(S_n^0) = \begin{pmatrix} 1-n & -1 & 1 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Misalkan S_n^0 adalah Graf Mahkota maka spectrum laplacian dari S_n^0 adalah

$$Spec L(S_n^0) = \begin{pmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bukti Formal

Misalkan $L(S_n^0)$ adalah matriks laplacian dari Graf Mahkota [5], maka

$$L(S_n^0) = \begin{pmatrix} (n-1) & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & (n-1) & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (n-1) & -1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & (n-1) & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & (n-1) & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (n-1)I & -K_n \\ -K_n & (n-1)I \end{pmatrix}$$

Dengan metode yang sama dengan pembuktian Teorema 1, Misalkan λ adalah nilai-nilai eigen dari $L(K_n)$, λ^* adalah nilai-nilai eigen dari $A(S_n^0)$ dan \mathbf{v}_λ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . kemudian misalkan

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ -\mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} L(S_n^0)\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} (n-1)I & -A(K_n) \\ -A(K_n) & (n-1)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda - A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda + (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda - \lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -\lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda + (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1-\lambda) \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ (n-1-\lambda) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= (n-1-\lambda) \mathbf{x} \\ &= \lambda^* \mathbf{x} \end{aligned}$$

Jadi untuk \mathbf{x} diperoleh $\lambda^* = (n-1-\lambda)$, maka

- untuk $\lambda = -1$, $\lambda^* = (n-1-\lambda) = -(n-1+1) = n$ dengan multiplisitas $n-1$.
- untuk $\lambda = n-1$, $\lambda^* = (n-1-\lambda) = (n-1-(n-1)) = 0$ dengan multiplisitas 1.

Kemudian untuk vektor \mathbf{y} , diperoleh

$$\begin{aligned} L(S_n^0)\mathbf{y} &= \begin{pmatrix} (n-1)I & -A(K_n) \\ -A(K_n) & (n-1)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_\lambda \\ -\mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda + A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -A(K_n) \cdot \mathbf{v}_\lambda - (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda + \lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ -\lambda \cdot \mathbf{v}_\lambda - (n-1) \cdot \mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1+\lambda) \cdot \mathbf{v}_\lambda \\ (n-1+\lambda) \cdot -\mathbf{v}_\lambda \end{pmatrix} \\ &= (n-1+\lambda) \mathbf{y} \\ &= \lambda^* \mathbf{y} \end{aligned}$$

Jadi untuk \mathbf{y} diperoleh $\lambda^* = (n-1+\lambda)$. maka

- untuk $\lambda = -1$, $\lambda^* = (n-1+\lambda) = (n-1-1) = n-2$ dengan multiplisitas $n-1$.

- untuk $\lambda = n-1$, $\lambda^* = (n-1-\lambda) = (n-1+(n-1)) = 2n-2$ dengan multiplisitas 1.

terbukti bahwa

$$Spec L(S_n^0) = \begin{pmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bukti lain:

$$\begin{aligned} L(S_n^0) &= D(S_n^0) - A(GS_n^0) \\ &= kI - A(G) \end{aligned}$$

dengan $D(S_n^0)$ adalah matrik diagonal S_n^0 dan k derajat setiap simpul di S_n^0 yaitu $k = n-1$

$$\begin{aligned} L(G_n)\mathbf{x} &= (kI - A(K_n))\mathbf{x} \\ &= k\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \\ &= (k-\lambda)\mathbf{x} \end{aligned}$$

Dimana λ adalah nilai-nilai eigen dari $A(K_n)$ dan multiplisitas dari $(k-\lambda)$ sama dengan multiplisitas dari λ .

Sehingga didapat:

- untuk $\lambda = 1-n$, maka $k-\lambda = (n-1)-(1-n) = 2n-2$ (multiplisitasnya 1)
- untuk $\lambda = -1$, maka $k-\lambda = (n-1)-(-1) = n$ (multiplisitasnya $n-1$)
- untuk $\lambda = 1$, maka $k-\lambda = (n-1)-(1) = n-2$ (multiplisitasnya $n-1$)
- untuk $\lambda = n-1$, maka $k-\lambda = (n-1)-(n-1) = 0$ (multiplisitasnya 1)

terbukti bahwa

$$Spec L(S_n^0) = \begin{pmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV. SIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat disimpulkan bahwa spectrum Graf Mahkota (S_n^0) adalah

$$Spec A(S_n^0) = \begin{pmatrix} 1-n & -1 & 1 & n-1 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

dan spectrum laplacian dari Graf Mahkota (S_n^0) adalah

$$Spec L(S_n^0) = \begin{pmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Penelitian ini masih dapat dikembangkan lagi, misalnya menentukan spectrum dan spectrum laplacian pada kelas graf lain misalnya pada graf shadow, graf fan, graf cocktail, graf matahari dan sebagainya.

V. DAFTAR RUJUKAN

- [1] M. Glen, S. Kitaev, and A. Pyatkin, "On the representation number of a crown graph," *Discret. Appl. Math.*, vol. 244, pp. 89–93, Jul. 2018.
- [2] S. Severini and E. W. Weisstein, "Crown Graph," p. 1, 2018.
- [3] N. Biggs, "Algebraic Graph Theory." Cambridge University Press, New York, p. 7, 1993.
- [4] K. A. Sugeng, S. Slamet, and D. Riama, *Teori Graf dan Aplikasinya*. Depok: Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, 2014, 36.
- [5] R. B. Bapat, *Graphs and Matrices*. New Delhi: Springer, 2014, 26, 47.
- [6] O. Jones, "Spectra of Simple Graphs," pp. 1–20, 2013.